3. $\ln w$ максимальный:

$$d \ln w = + \Sigma \ln \left(\frac{g_i}{n_i} - 1 \right) \partial n_i = 0.$$

Используя метод неопределенных множителей Лагранжа, найдем

$$\Sigma \left[\lambda + \mu \varepsilon_i + \ln \left(\frac{g_i}{n_i} - 1 \right) \right] \partial n_i = 0.$$

Так как каждый член суммы должен быть равен нулю, то

$$\frac{g_i}{n_i} = e^{-\lambda} e^{-\mu \varepsilon_i} + 1;$$

$$n_i = \frac{g_i}{e^{-\lambda} e^{-\mu \varepsilon_i} + 1}. \quad (3\text{-}13)$$

Эту функцию распределения впервые вывел Ферми, а затем применил Дирак к свободным электронам металла; она известна как распределение Ферми — Дирака и отличается от распределения Больцмана для различных частиц на член (+1) в знаменателе.

5. Распределение Бозе — Эйнштейна [17]

Статистический анализ для системы молекул идеального газа подобен анализу для свободных электронов в металле, за исключением того, что нет ограничений для числа молекул газа, которые могут находиться на отдельном энергетическом уровне.

Как и ранее, рассмотрим систему, состоящую из группы g_1 уровней энергии ε_1, заполненных n_1 молекулами, второй группы g_2 уровней энергии ε_2, заполненных n_2 молекулами, и т. д. Примем, что молекулы неразличимы и нет ограничений для числа их на любом энергетическом уровне какой-либо группы. Общее число молекул составляет Σn_i. Общая энергия равна $\Sigma n_i \varepsilon_i$.

При распределении молекул на уровнях первой группы первая молекула будет иметь g_1 различных возможностей своего размещения, поскольку она может быть на любом из g_1 уровне. Если добавляется вторая молекула, то будет g_1 возможностей для размещения обеих молекул на одном и том же уровне; кроме того, вследствие доводов, приведенных в п. 4, будет $\frac{g_1(g_1-1)}{2}$ возможностей для размещения этих молекул на различных уровнях. Следовательно, общее число способов, с помощью которых две молекулы могут быть размещены на g_1 уровнях, равно

$$g_1 + \frac{g_1(g_1 - 1)}{2} = g_1 \left(1 + \frac{g_1 - 1}{2} \right) = g_1 \frac{g_1 + 1}{2}.$$