Наконец, барицентрические комбинации ведут себя как линейные комбинации относительно аффинных отображений.

18. Предложение. а) *Пусть* $f\colon A_1 \to A_2$ — *аффинное отображение и* $a_0, \ldots, a_s \in A_1$. *Тогда*

$$f\left(\sum_{i=0}^{s} x_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{s} x_i f(a_i),$$

если $\sum_{i=0}^{s} x_i = 1$.

б) *Пусть* $a_0, \ldots, a_n$ *задают барицентрическую систему координат в* A_1. *Тогда для любых точек* $b_0, \ldots, b_n \in A_2$ *существует единственное аффинное отображение* f, *переводящее* a_i *в* b_i, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Выбрав $a \in A_1$, получим

$$f\left(\sum_{i=0}^{s} x_i a_i\right) = f\left(a + \sum_{i=0}^{s} x_i (a_i - a)\right) = f(a) + Df\left(\sum_{i=0}^{s} x_i (a_i - a)\right) =$$
$$= f(a) + \sum_{i=0}^{s} x_i Df(a_i - a) = f(a) + \sum_{i=0}^{s} x_i (f(a_i) - f(a)) = \sum_{i=0}^{s} x_i f(a_i)$$

по предложению п. 15, что доказывает утверждение а).

Если $a_0, \ldots, a_n$ образуют барицентрическую систему координат в A_1, то по следствию п. 16 всякая точка A представляется единственной барицентрической комбинацией $\sum_{i=0}^{n} x_i a_i$. Определим тогда теоретико-множественное отображение $f\colon A_1 \to A_2$ формулой $f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i b_i$. В силу а) это единственное возможное определение, и нужно лишь проверить, что f — аффинное отображение. Действительно, вычисляя, как в предложении п. 15, получаем

$$f\left(\sum_{i=0}^{n} x_i a_i\right) - f\left(\sum_{i=0}^{n} y_i a_i\right) = \sum_{i=0}^{n} x_i b_i - \sum_{i=0}^{n} y_i b_i = b_0 + \sum_{i=0}^{n} x_i (b_i - b_0) -$$
$$-\left[b_0 + \sum_{i=0}^{n} y_i (b_i - b_0)\right] = \sum_{i=0}^{n} (x_i - y_i)(b_i - b_0) = Df\left(\sum_{i=0}^{n} x_i a_i - \sum_{i=0}^{n} y_i a_i\right),$$

где $Df\colon L_1 \to L_2$ — линейное отображение, переводящее $a_i - a_0$ в $b_i - b_0$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Оно существует, ибо $a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0$ по предположению образуют базис L_1.

19. Замечания. В аффинном пространстве $\mathbf{R}^n$ барицентрическая комбинация $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} a_i$ представляет положение «центра масс» системы единичных масс, помещенных в точках a_i. Этим объясняется терминология. Если $a_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (единица на i-м месте), то множество точек с барицентрическими координатами $x_1, \ldots, x_n$, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, составляет пересечение линейного много-