

определению удовлетворяют соотношению  $\frac{1}{i} [f, g] = \text{id}$ . Для них

$$\widehat{\Delta f}_\psi \cdot \widehat{\Delta g}_\psi \geq \frac{1}{2}.$$

каково бы ни было состояние  $\psi$ . Заметим, что в конечномерных пространствах таких пар нет, ибо  $\text{Tr} [f, g] = 0$ ,  $\text{Tr} \text{id} = \dim \mathcal{H}$ . Однако в бесконечномерных пространствах они существуют. Классический пример:

$$\frac{1}{i} \left[ x, \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \right] = \text{id}.$$

Эти операторы появляются в квантовых моделях физических систем, которые на классическом языке называются «частица, движущаяся в одномерном потенциальном поле».

Опишем эти и некоторые другие наблюдаемые подробнее.

4. а) *Наблюдаемая координаты*. Это оператор умножения на  $x$  в пространстве комплексных функций на  $\mathbf{R}$  (или некоторых подмножествах  $\mathbf{R}$ ) со скалярным произведением  $\int f(x) \bar{g}(x) dx$ . Понимается квантовая система: «частица, движущаяся по прямой, во внешнем поле».

б) *Наблюдаемая импульса*. Это оператор  $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$  в аналогичных пространствах функций. (При нем обычно пишут множителем постоянную Планка  $\hbar$ ; это относится к выбору системы единиц, на котором мы не останавливаемся.)

в) *Наблюдаемая энергии квантового осциллятора*. Это — оператор  $\frac{1}{2} \left[ -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \right]$ , снова в подходящих единицах.

г) *Наблюдаемая проекции спина* для системы «частица со спином  $1/2$ ». Это любой самосопряженный оператор с собственными значениями  $\pm 1/2$  на двумерном унитарном пространстве. Дальнейшие подробности о нем будут даны позже.

В примерах а) — в) мы намеренно не уточняли, в каких унитарных пространствах действуют наши операторы. Они существенно бесконечномерны и строятся и изучаются средствами функционального анализа. О примере г) мы скажем кое-что еще ниже.

## 5. Наблюдаемая энергии и эволюция системы во времени.

В описание любой квантовой системы вместе с ее пространством состояний  $\mathcal{H}$  входит задание фундаментальной наблюдаемой  $H: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , которая называется *наблюдаемой энергии*, или *оператором Гамильтона*, или *гамильтонианом*.

В ее терминах формулируется последний из основных постулатов квантовой механики.

Если в момент времени 0 система находилась в состоянии  $\psi$  и за промежуток времени  $t$  развивалась как изолированная система, в частности, над ней не производились измерения, то в мо-