два — в симплектическом). Поэтому мы закончим этот параграф непосредственным описанием таких маломерных пространств с метрикой.

7. Одномерные ортогональные пространства. Пусть $\dim L = 1$, g — ортогональное скалярное произведение на L. Возьмем любой ненулевой вектор $l \in L$. Если $g(l, l) = 0$, то $g \equiv 0$, так что g вырожденное и нулевое. Если $g(l, l) = a \neq 0$, то для любого $x \in \mathcal{K}$ значение $g(xl, xl)$ равно ax^2, так что все значения $g(l, l)$ на ненулевых векторах в L составляют в мультипликативной группе $\mathcal{K}^* = \mathcal{K} \setminus \{0\}$ поля $\mathcal{K}$ смежный класс по подгруппе, состоящей из квадратов: $\{ax^2 | x \in \mathcal{K}^*\} \in \mathcal{K}^*/(\mathcal{K}^*)^2$. *Этот смежный класс полностью характеризует невырожденное симметричное скалярное произведение на одномерном пространстве* L: для (L_1, g_1) и (L_2, g_2) два таких класса совпадают тогда и только тогда, когда эти пространства изометричны. В самом деле, если $g_1(l_1, l_1) = ax^2$, $g_2(l_2, l_2) = ay^2$, где $l_i \in L_i$, то отображение f: $l_1 - y^{-1}xl_2$ определяет изометрию L_1 с L_2, что доказывает достаточность. Необходимость очевидна.

Так как $\mathbf{R}^*/(\mathbf{R}^*)^2 = \{\pm 1\}$ и $\mathbf{C}^* = (\mathbf{C}^*)^2$, мы получаем следующие важные частные случаи классификации.

Над $\mathbf{R}$ *любое одномерное ортогональное пространство изометрично одномерному координатному пространству с одним из трех скалярных произведений*: xy, $-xy$, 0.

Над $\mathbf{C}$ *любое одномерное ортогональное пространство изометрично одномерному координатному пространству с одним из двух скалярных произведений*: xy, 0.

8. Одномерные эрмитовы пространства. Здесь рассуждения аналогичны. Основное поле равно $\mathbf{C}$; вырожденность формы равносильна ее обращению в нуль. Если же форма невырождена, то множество значений $g(l, l)$ для ненулевых векторов $l \in L$ есть смежный класс подгруппы $\mathbf{R}^*_+ = \{x \in R^* | x > 0\}$ в группе $\mathbf{C}^*$, ибо $g(al, al) = a\bar{a}g(l, l) = |a|^2 g(l, l)$, и $|a|^2$ пробегает все значения в $\mathbf{R}^*_+$, когда $a \in \mathbf{C}^*$. Но каждое ненулевое комплексное число z однозначно представляется в виде $re^{i\varphi}$, где $r \in R^*_+$, а $e^{i\varphi}$ лежит на единичной комплексной окружности, которую мы обозначим

$$\mathbf{C}^*_1 = \{z \in \mathbf{C}^* \,|\, |z| = 1\}.$$

На групповом языке это определяет прямое разложение $\mathbf{C}^* = \mathbf{R}^*_+ \times \mathbf{C}^*_1$ и изоморфизм $\mathbf{C}^*/\mathbf{R}^*_+ \to \mathbf{C}^*_1$. Таким образом, невырожденные полуторалинейные формы классифицируются комплексными числами, по модулю равными единице. Однако мы еще не полностью учли свойства эрмитовости, которое означает, что $g(l, l) = \overline{g(l, l)}$, т. е. что значения $g(l, l)$ все вещественны. Поэтому эрмитовым формам отвечают только числа ± 1 в $\mathbf{C}^*_1$, как и в ортогональном случае над $\mathbf{R}$. Окончательный ответ:

Над $\mathbf{C}$ *любое одномерное эрмитово пространство изометрично одномерному координатному пространству с одним из трех скалярных произведений*: $x\bar{y}$, $-x\bar{y}$, 0.