лютную» параллельность, многообразие следует наделить ещё одной структурой, называемой *аффинной связностью*. Это делается в гл. 6, посвящённой римановой геометрии. Здесь мы рассмотрим другую конструкцию, полезную при решении любой задачи, в которой центральную роль играет конгруэнция. Конгруэнция сама даёт возможность ввести понятие параллельности в различных точках. Для сравнения векторов в точках λ и $\lambda + \Delta\lambda$, принадлежащих некоторой кривой, достаточно выполнить перенос Ли вектора в точке $\lambda + \Delta\lambda$ обратно в точку λ. В результате в точке λ получится новый вектор, вычитая который из старого можно найти разность между ними. Заметим, что эта разность определена *однозначно*, следовательно, заданная конгруэнция однозначно определяет производную. Но эта производная зависит от конгруэнции.

Выведем аналитические формулы для вычисления производной. Для начала рассмотрим скалярную функцию. Вычислим значение скаляра в точке $\lambda_0 + \Delta\lambda$, перенесем его обратно в точку λ_0, вычтем из него значение скаляра в точке λ_0, разделим эту разность на $\Delta\lambda$ и перейдем к пределу при $\Delta\lambda \to 0$. Более подробно, значение скалярного поля f в точке $\lambda_0 + \Delta\lambda$ равно $f(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. В результате переноса этого значения мы получим новое (ли-тянутое) поле f^*, удовлетворяющее соотношению $\mathrm{d}f^*/\mathrm{d}\lambda = 0$. Очевидно, его значение в точке λ_0 то же самое, что и в точке $\lambda_0 + \Delta\lambda$: $f^*(\lambda_0) = f(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. Следовательно, определённая выше производная имеет вид

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{f^*(\lambda_0) - f(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{f(\lambda_0 + \Delta\lambda) - f(\lambda_0)}{\Delta\lambda} = \left(\frac{df}{d\lambda}\right)_{\lambda_0}. \quad (3.2)$$

Полученная формула для *производной Ли* функции f не является, конечно, неожиданной. Для оператора взятия производной Ли имеется специальное обозначение: $\pounds_{\bar{V}}$; здесь $\bar{V}$ — векторное поле, порождающее отображение переноса (в нашем случае поле $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$). Мы доказали, что для функций

$$\blacklozenge \quad \pounds_{\bar{V}} f = \bar{V}(f) = df/d\lambda. \quad (3.3)$$

Теперь проделаем то же для векторного поля $\bar{U} = \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu$. Поскольку вектор определяется своим действием на функции, мы используем в дальнейших рассуждениях *произвольную* функцию f. В точке λ_0 поле $\bar{U}$ даёт производную $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\mu)_{\lambda_0}$, а в точке $\lambda + \Delta\lambda$ — производную $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\mu)_{\lambda_0 + \Delta\lambda}$. Перенося $\bar{U}(\lambda_0 + \Delta\lambda)$, как в конце § 3.3, мы получаем новое, ли-тянутое поле $\bar{U}^* = \mathrm{d}/\mathrm{d}\mu^*$, удовлетворяющее соотношениям $[\bar{U}^*, \bar{V}] = 0$ и $\bar{U}^*(\lambda_0 + \Delta\lambda) = \bar{U}(\lambda_0 + \Delta\lambda)$. Из обращения коммутатора в