

В заключение этого параграфа приведем сводку условий, характеризующих области голоморфности в \mathbb{C}^n .

Теорема 4. Эквивалентны следующие пять условий:

(I) D — область голоморфности (т. е. существует функция $f \in H(D)$, не продолжаемая голоморфно в более широкую область, см. п. 20);

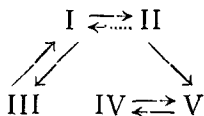
(II) D не расширяема голоморфно в каждой граничной точке (т. е. для любой точки $\zeta \in \partial D$ существует окрестность U и функция $f \in H(D \cap U)$, не продолжаемая голоморфно в точку ζ , см. п. 24);

(III) D голоморфно выпукла (т. е. для любого множества $K \Subset D$ голоморфно выпуклая оболочка $\hat{K}_H = \{z \in D: |f(z)| \leq \|f\|_K\}$ для всех $f \in H(D)\} \Subset D$, см. п. 21);

(IV) D псевдовыпукла (т. е. функция $-\ln e(z, \partial D)$ является плюрисубгармонической в D , см. п. 26);

(V) D выпукла в смысле Леви (т. е. не существует последовательности компактных аналитических поверхностей $S_\nu \rightarrow S$, $\partial S_\nu \rightarrow \partial S$ таких, что $S_\nu, \partial S \Subset D$, а S содержит точку $\zeta \in \partial D$, см. п. 24).

◀ Выше были доказаны импликации, изображенные сплошными стрелками на схеме



(импликация (I) \rightarrow (II) тривиальна, импликации (I) \rightleftharpoons (III) составляют содержание теоремы 4 п. 21, (II) \rightarrow (V) — теоремы 1 п. 24, (IV) \rightleftharpoons (V) — теорем 2 и 3 этого пункта).

Изображенная пунктирной стрелкой импликация (II) \dashrightarrow (I) составляет содержание теоремы Ока, решающей проблему Леви, о которой мы говорили в п. 24; эта теорема будет доказана в гл. IV. Пользуясь теоремой Ока, мы докажем сейчас, что (IV) \rightarrow (I), и это замкнет цепочку эквивалентностей.

Итак, пусть для некоторой области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция

$$\varphi(z) = -\ln e(z, \partial D)$$

плюрисубгармонична в D . По теореме 4 п. 25 построим последовательность функций $\varphi_\mu \searrow \varphi$, плюрисубгармонических класса C^∞ в открытых множествах G_μ , причем G_μ образуют возрастающую последовательность, аппроксимирующую область D изнутри.

Так как функция $\varphi(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow \partial D$, то для любого μ можно найти номер $\nu = \nu(\mu)$ такой, что множество

$$\{z \in D: \varphi(z) < \mu\} \Subset G_\nu.$$