В заключение этого параграфа приведем сводку условий, характеризующих области голоморфности в $\mathbb{C}^n$.

Теорема 4. *Эквивалентны следующие пять условий*:

(I) D — *область голоморфности* (т. е. существует функция $f \in H(D)$, не продолжаемая голоморфно в более широкую область, см. п. 20);

(II) D *не расширяема голоморфно в каждой граничной точке* (т. е. для любой точки $\zeta \in \partial D$ существует окрестность U и функция $f \in H(D \cap U)$, не продолжаемая голоморфно в точку ζ, см. п. 24);

(III) D *голоморфно выпукла* (т. е. для любого множества $K \Subset D$ голоморфно выпуклая оболочка $\widehat{K}_H = \{z \in D\colon |f(z)| \leqslant \|f\|_K$ для всех $f \in H(D)\} \Subset D$, см. п. 21);

(IV) D *псевдовыпукла* (т. е. функция $-\ln e(z, \partial D)$ является плюрисубгармонической в D, см. п. 26);

(V) D *выпукла в смысле Леви* (т. е. не существует последовательности компактных аналитических поверхностей $S_\nu \to S$, $\partial S_\nu \to \partial S$ таких, что S_ν, $\partial S \Subset D$, а S содержит точку $\zeta \in \partial D$, см. п. 24).

◄ Выше были доказаны импликации, изображенные сплошными стрелками на схеме

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{I} \arrow[rr, shift left] \arrow[dl, shift left] & & \mathrm{II} \arrow[ll, dotted, shift left] \arrow[dr] & \\
\mathrm{III} \arrow[ur, shift left] & & \mathrm{IV} \arrow[rr, shift left] & & \mathrm{V} \arrow[ll, shift left]
\end{tikzcd}$$

(импликация (I)$\to$(II) тривиальна, импликации (I)$\rightleftarrows$(III) составляют содержание теоремы 4 п. 21, (II)$\to$(V) — теоремы 1 п. 24, (IV)$\rightleftarrows$(V) — теорем 2 и 3 этого пункта).

Изображенная пунктирной стрелкой импликация (II)$\dashrightarrow$(I) составляет содержание теоремы Ока, решающей проблему Леви, о которой мы говорили в п. 24; эта теорема будет доказана в гл. IV. Пользуясь теоремой Ока, мы докажем сейчас, что (IV)$\to$(I), и это замкнет цепочку эквивалентностей.

Итак, пусть для некоторой области $D \subset \mathbb{C}^n$ функция

$$\varphi(z) = -\ln e(z, \partial D)$$

плюрисубгармонична в D. По теореме 4 п. 25 построим последовательность функций $\varphi_\mu \searrow \varphi$, плюрисубгармонических класса C^∞ в открытых множествах G_μ, причем G_μ образуют возрастающую последовательность, аппроксимирующую область D изнутри.

Так как функция $\varphi(z) \to \infty$ при $z \to \partial D$, то для любого μ можно найти номер $\nu = \nu(\mu)$ такой, что множество

$$\{z \in D\colon \varphi(z) < \mu\} \Subset G_\nu.$$