

Определение 2. Семейство функций $\{f\}$, заданных в некоторой области D , называется *равностепенно непрерывным внутри D* , если для любого $\varepsilon > 0$ и любого множества $K \Subset D$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ такое, что

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon \quad (3)$$

для всех $z', z'' \in K$ таких, что $|z' - z''| < \delta$, и всех $f \in \{f\}$.

Теорема 2. Если семейство функций $\{f\}$, голоморфных в области D , равномерно ограничено внутри D , то оно и равностепенно непрерывно внутри D .

◀ Пусть $K \Subset D$; обозначим через 2ρ расстояние между непересекающимися замкнутыми множествами \bar{K} и ∂D (т. е. $\inf |\xi - z|$ по всем $z \in \bar{K}$ и всем $\xi \in \partial D$) и через

$$K^{(\rho)} = \bigcup_{z_0 \in K} \{|z - z_0| < \rho\}$$

ρ -раздутье множества K . Так как, очевидно, $K^{(\rho)} \Subset D$, то по теореме 1 найдется постоянная M такая, что

$$|f'(z)| \leq M \quad (4)$$

для всех $z \in K^{(\rho)}$ и всех $f \in \{f\}$.

Пусть z', z'' — две произвольные точки K такие, что $|z' - z''| < \rho$; тогда все точки z прямолинейного отрезка $[z', z'']$ принадлежат $K^{(\rho)}$ и, следовательно, для всех $z \in [z', z'']$ и всех $f \in \{f\}$ справедливо неравенство (4). Поэтому для всех $f \in \{f\}$ мы имеем

$$|f(z') - f(z'')| = \left| \int_{[z', z'']} f'(z) dz \right| \leq M |z' - z''|.$$

Отсюда и следует равностепенная непрерывность семейства $\{f\}$ на K , ибо для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = \min\left(\rho, \frac{\varepsilon}{M}\right)$ ▶

Определение 3. Семейство функций $\{f\}$, заданных в некоторой области D , называется *компактным*¹⁾ в D , если из каждой последовательности f_n функций этого семейства можно извлечь подпоследовательность f_{n_k} , сходящуюся равномерно на любом $K \Subset D$.

¹⁾ Будем рассматривать функции, определенные в области D , как точки некоторого пространства $A(D)$. В этом пространстве введем топологию, назвав *сходящейся* любую последовательность f_n , равномерно сходящуюся на каждом компактном подмножестве $K \Subset D$. Тогда компактность семейства функций $\{f\}$ сводится к компактности соответствующего множества точек в пространстве $A(D)$. Это замечание оправдывает сделанный выбор термина.