жение, h_1 — линейное отображение и $f(x) = g_1(x, x) + h_1(x)$, то $2g(x, y) = 2g_1(x, y)$. Так как по предположению F не имеет 2-кручения, то отсюда вытекает, что $g(x, y) = g_1(x, y)$ для всех $x, y \in E$ и, следовательно, g однозначно определено. Но тогда h определяется из соотношения

$$h(x) = f(x) - g(x, x).$$

Мы будем называть g, h билинейным и линейным отображениями, *ассоциированными* с f.

Для отображения $f\colon E \to F$ определим

$$\Delta f\colon E \times E \to F,$$

положив

$$\Delta f(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y).$$

Мы будем говорить, что f — *однородное квадратичное* отображение, если оно квадратичное и если ассоциированное с ним линейное отображение равно 0. Мы будем говорить, что модуль F *однозначно делим* на 2, если для всякого $z \in F$ существует единственный элемент $u \in F$, такой, что $2u = z$. (Это снова выполняется, если элемент 2 обратим в R.)

Предложение 4. *Пусть $f\colon E \to F$ — такое отображение, что Δf билинейно, причем модуль F однозначно делим на 2. Тогда отображение $x \mapsto f(x) - \frac{1}{2}\Delta f(x, x)$ $\mathbf{Z}$-линейно. Если f удовлетворяет условию $f(2x) = 4f(x)$, то f — однородное квадратичное.*

Доказательство. Очевидно.

Под *квадратичной формой* на E понимают однородное квадратичное отображение $f\colon E \to R$ со значениями в R.

В дальнейшем мы в основном будем интересоваться симметрическими билинейными формами. Квадратичные формы будут играть второстепенную роль.

Рассматривая квадратичные формы в § 3—8, мы будем предполагать, что k — поле характеристики $\neq 2$. В оставшейся части главы мы будем также предполагать, что все модули и векторные пространства конечномерны.

§ 3. Симметрические формы, ортогональные базисы

Теорема 1. *Пусть E — векторное пространство над k и g — симметрическая форма на E. Если $\dim E \geqslant 1$, то в E существует ортогональный базис.*