

Расширение  $K$  поля  $k$ , удовлетворяющее условиям предложения 4, называется *сепарабельным*, что согласуется с использованием этого слова для алгебраических расширений.

Утверждение об эквивалентности первых двух условий нашего предложения известно как *критерий Маклейна*. Оно имеет следующие непосредственные следствия:

Следствие 1. *Если  $K$  сепарабельно над  $k$  и  $E$  — подполе в  $K$ , содержащее  $k$ , то  $E$  сепарабельно над  $k$ .*

Следствие 2. *Пусть  $E$  — сепарабельное расширение над  $k$  и  $K$  — сепарабельное расширение над  $E$ . Тогда  $K$  — сепарабельное расширение над  $k$ .*

Доказательство. Применить предложение 1 и определение сепарабельности.

Следствие 3. *Если поле  $k$  совершенно, то всякое расширение над  $k$  сепарабельно.*

Следствие 4. *Пусть  $K$  — сепарабельное расширение над  $k$ , алгебраически свободное от расширения  $L$  поля  $k$ . Тогда  $KL$  — сепарабельное расширение поля  $L$ .*

Доказательство. Всякий элемент из  $KL$  допускает представление в виде комбинации конечного числа элементов из  $K$  и  $L$ . Следовательно, любое конечно порожденное подполе в  $KL$ , содержащее  $L$ , содержится в композите  $FL$ , где  $F$  — некоторое подполе в  $K$ , конечно порожденное над  $k$ . В силу следствия 1 мы можем предполагать, что  $K$  конечно порождено над  $k$ . Пусть  $(t)$  — базис трансцендентности  $K$  над  $k$ , такой, что  $K$  — сепарабельное алгебраическое расширение поля  $k(t)$ . По предположению  $(t)$  есть базис трансцендентности  $KL$  над  $L$ , и так как всякий элемент из  $K$  является сепарабельным алгебраическим над  $k(t)$ , то он также сепарабелен над  $L(t)$ . Следовательно,  $KL$  сепарабельно порождено над  $L$ . Следствие доказано.

Следствие 5. *Пусть  $K$  и  $L$  — два сепарабельных расширения поля  $k$ , алгебраически свободные друг от друга над  $k$ . Тогда  $KL$  сепарабельно над  $k$ .*

Доказательство. Применить следствия 4 и 2.

Следствие 6. *Пусть  $K$ ,  $L$  — два расширения поля  $k$ , линейно свободные над  $k$ . Тогда  $K$  сепарабельно над  $k$  в том и только в том случае, если  $KL$  сепарабельно над  $L$ .*

Доказательство. Если поле  $K$  не сепарабельно над  $k$ , то оно не линейно свободно от  $k^{1/p}$  над  $k$  и тем более не линейно сво-