разложения, очевидно, выполняются. Кроме того, теорема 3 немедленно распространяется на бесконечный случай.

Следствие. *Пусть K — поле разложения для семейства $\{f_i\}_{i \in I}$ и E — какое-нибудь другое поле разложения. Любое вложение E в $\overline{K}$, индуцирующее тождественное отображение на k, определяет изоморфизм E на K.*

Доказательство. Мы сохраняем предыдущие обозначения. Заметим, что E содержит однозначно определенное поле разложения E_i многочлена f_i и K содержит однозначно определенное поле разложения K_i многочлена f_i. Любое вложение σ поля E в $\overline{K}$ должно отображать E_i на K_i в силу теоремы 3 и, следовательно, переводить E в K. Так как K есть композит полей K_i, наше отображение σ должно переводить E на K и, следовательно, оно индуцирует изоморфизм E на K.

Замечание. Если I конечно и $f_1, \ldots, f_n$ — наши многочлены, то поле разложения для них — это поле разложения для одного многочлена $f(X) = f_1(X) \ldots f_n(X)$, являющегося их произведением. Однако, даже если ограничиться только конечными расширениями, удобнее иметь дело сразу с множествами многочленов, а не с одним многочленом.

Теорема 4. *Пусть K — алгебраическое расширение поля k, содержащееся в некотором его алгебраическом замыкании $\overline{k}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

НОР 1. *Всякое вложение σ поля K в $\overline{k}$ над k является автоморфизмом поля K.*

НОР 2. *K — поле разложения некоторого семейства многочленов в $k[X]$.*

НОР 3. *Всякий неприводимый в $k[X]$ многочлен, имеющий корень в K, разлагается в K на линейные множители.*

Доказательство. Предположим, что выполняется НОР 1. Пусть α — элемент из K, $p_\alpha(X)$ — его неприводимый многочлен над k и β — корень многочлена p_α в $\overline{k}$. Тогда существует изоморфизм поля $k(\alpha)$ на $k(\beta)$ над k, отображающий α в β. Продолжим этот изоморфизм до вложения K в $\overline{k}$. Это продолжение есть по предположению автоморфизм σ поля K, и, следовательно, $\sigma\alpha = \beta$ лежит в K. Значит, всякий корень многочлена p_α лежит в K и p_α разлагается на линейные множители в $K[X]$. Следовательно, K есть поле разложения для семейства $\{p_\alpha\}_{\alpha \in K}$, где α пробегает все элементы поля R, и тем самым выполняется НОР 2.